

TD<sub>5</sub> – Matrices

## Exercices à préparer

## Exercice 1 ★★

Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par  $\varphi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
2. Déterminer le noyau et le rang de  $\varphi$ . Est-il bijectif?
3. Vérifier que  $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0$ , en déduire l'expression de  $\varphi^{-1}$ .

## Exercice 2 ★★

Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}[X]$ , qui à un polynôme  $P$  associe  $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canonique, notée  $\mathcal{B}_{can}$ .
3. On pose  $P_1 = (X+1)^2$ ,  $P_2 = X^2 - 1$  et  $P_3 = (X-1)^2$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , puis donner la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$ .
4. En déduire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer la matrice de  $\varphi^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En déduire la matrice  $\varphi^n$  dans la base canonique.